2026 **年早稲田大学教育学部問題** *1*

$a \geqq \sqrt{2}-1,\ b \geqq \sqrt{2},\ c \geqq \sqrt{2}+1$ を満たす全ての実数 a, b, c で
不等式 $ab+bc+ca+a+b+c+1 \leqq kabc$ が成立する k の最小値を求めてください。

解説・解答

不等式を abc で割ります。
$k \geqq \dfrac{ab+bc+ca+a+b+c+1}{abc} = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{abc}$

x が正で小さいほど $\dfrac{1}{x}$ は大きな値になるので
$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{abc}$ は
$(a,b,c)=(\sqrt{2}-1,\sqrt{2},\sqrt{2}+1)$ のとき最大になります。

$$\frac{ab+bc+ca+a+b+c+1}{abc}$$
$$\leqq \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}+(\sqrt{2}+1)+1}{(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)}$$
$$= \frac{6+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3+3\sqrt{2} \leqq k$$

以上より、k の最小値は $3+3\sqrt{2}$ です。