2026 **年早稲田大学商学部問題** *2*

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = c\,,\ n^2 a_{n+1} = (n+1)^2 a_n - 26n(n+1)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たします。
数列 $\{a_n\}$ の最大の項が 56 となる整数 c を求めてください。

解説・解答

$n^2a_{n+1}=(n+1)^2a_n-26n(n+1)$ の両辺を $n^2(n+1)^2$ で割ります。
$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\dfrac{a_n}{n^2}-\dfrac{26}{n(n+1)}$
$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^2}-\dfrac{26}{n+1}=\dfrac{a_n}{n^2}-\dfrac{26}{n}$ に式変形できるので $\dfrac{a_n}{n^2}-\dfrac{26}{n}=\dfrac{a_1}{1^2}-\dfrac{26}{1}=c-26$ です。
よって $a_n=\big(c-26\big)n^2+26n=-\big(26-c\big)\Big(n-\dfrac{13}{26-c}\Big)^2+\dfrac{169}{26-c}$ です。

最大値を持つので n^2 の係数は負 $c-26<0$ よって $c<26$ です。
最大値が 56 なので $\dfrac{169}{26-c}\geqq 56$ よって $c\geqq\dfrac{1287}{56}=22.9\cdots$ です。
ゆえに $c=23,24,25$ です。

$a_n=(c-26)n^2+26n=\{(c-26)n+26\}n$ なので、n は a_n の約数です。
$a_n=56$ のときの n は 56 の約数です。

a_n は $\dfrac{13}{26-c}$ に一番近い整数 n で最大になります。
$c=23$ のとき $\dfrac{13}{26-23}=4.3\cdots$、最大値 $a_4=\{(23-26)\cdot 4+26\}\cdot 4=56$ です。
$c=24$ のとき $\dfrac{13}{26-24}=6.5$、最大値 $a_6=a_7$ で 6 は 56 の約数でないので不適です。
$c=25$ のとき $\dfrac{13}{26-25}=13$、最大値 a_{13} で 13 は 56 の約数でないので不適です。

以上より、最大の項が 56 となる整数 c は 23 です。