

2026 年大阪大学理系問題 5

サイコロを 3 回投げ、出た目を順に a, b, c とします。

a, b, c の最大の数 m と置き、 $x = \frac{(a+b+c)^2}{3abc}$ と置きます。

m が偶数であったとき、 x が整数である条件付き確率を求めてください。

解説・解答

サイコロの出目なので a, b, c は 1 以上 6 以下の整数です。

$m = 2k$ ($k = 1, 2, 3$) のとき (a, b, c) は $(2k)^3 - (2k - 1)^3$ 通りあります。

$$x = \frac{(2k + s + t)^2}{6kst}, \quad 1 \leq s \leq t \leq 2k \quad (s, t \text{ は整数})$$

x が整数なら $2k + s + t$ は 6 の倍数です。

$k = 1$ の場合

$2 + s + t$ が 6 の倍数なのは $(s, t) = (2, 2)$ です。

$(s, t) = (2, 2)$ で $x = \frac{3}{2}$ です。

x が整数となる (a, b, c) はありません。

$k = 2$ の場合

$4 + s + t$ が 6 の倍数なのは $(s, t) = (1, 1), (4, 4)$ です。

$(s, t) = (1, 1)$ で $x = 3$, $(s, t) = (4, 4)$ で $x = \frac{3}{2}$ です。

x が整数となる (a, b, c) は $(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1)$ の 3 通りです。

$k = 3$ の場合

$6 + s + t$ が 6 の倍数なのは $(s, t) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (6, 6)$ です。

$(s, t, x) = (1, 5, \frac{8}{5}), (2, 4, 1), (3, 3, \frac{16}{9}), (6, 6, \frac{3}{2})$

x が整数となる (a, b, c) は $\{2, 4, 6\}$ の順列で $3! = 6$ 通りです。

m が偶数な (a, b, c) は $(2^3 - 1^3) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) = 135$ 通りあります。

求める確率は $\frac{3+6}{135} = \frac{1}{15}$ です。