

2026 年新潟大学文系問題 2

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2^{n+2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定めます。
一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

漸化式 $\times 3^{n+2}$ より $3^{n+2}a_{n+1} - 3^{n+1}a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}$ です。

$n \geq 2$ の場合

$$\begin{aligned} 3^{n+1}a_n &= 3^2a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3^{k+2}a_{k+1} - 3^{k+1}a_k) \\ &= 9 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+2} \\ &= 9 + \frac{27}{4} \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \quad (\text{この式は } n=1 \text{ でも成立する}) \end{aligned}$$

よって $a_n = \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}} + \frac{3}{2^{n+1}}$ です。