

2026年九州大学文系問題 3

n は自然数です。

$(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$ が整数となる必要十分条件を求めてください。

解説・解答

$\alpha = \sqrt{2} + 1 > 0$, $\beta = \sqrt{2} - 1 > 0$, $a_n = \alpha^n + \beta^n > 0$ と置きます。

$$a_1 = \alpha + \beta = 2\sqrt{2}, \quad a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6$$

自然数 k で $a_{2k-1} = \sqrt{2}b_{2k-1}$, $a_{2k} = b_{2k}$ (b_{2k-1}, b_{2k} は整数) と仮定します。

$$a_{2k+1} = \alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1} = (\alpha^{2k} + \beta^{2k})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}) = \sqrt{2}(2b_{2k} - b_{2k-1})$$

$$a_{2k+2} = \alpha^{2k+2} + \beta^{2k+2} = (\alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{2k} + \beta^{2k}) = 7b_{2k} - 4b_{2k-1}$$

数学的帰納法により、

n が奇数のとき $a_n = \sqrt{2}b_n$ (b_n は整数)、偶数のとき $a_n = b_n$ (b_n は整数) です。

$\sqrt{2}$ は無理数なので $\sqrt{2}b_n$ は整数ではありません。

以上より $(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$ が整数となる必要十分条件は「 n が偶数」です。