2026 **年共通テスト数** *I* **問題** *1*

定数 a は $a \neq 1$ とします。
x についての連立不等式 $x - \sqrt{6}\,a + 1 \geqq 0$，$(a-1)x - 2a^2 - a + 3 \leqq 0$ の解を考えます。
整数解 x が 1 つだけとなる整数 a の値を求めてください。

解説・解答

$x-\sqrt{6}a+1 \geqq 0$ より $x \geqq \sqrt{6}a-1$
$(a-1)x-2a^2-a+3=(a-1)(x-2a-3)) \leqq 0$ より $a<1$ のとき $x \geqq 2a+3$
$a>1$ のとき $x \leqq 2a+3$
$2a+3 \geqq \sqrt{6}a-1$ より $a \leqq \dfrac{4}{\sqrt{6}-2}=2\sqrt{6}+4=8.89\cdots$

連立不等式の解 x は
$a<1$ のとき $x \geqq 2a+3$
$1<a \leqq 2\sqrt{6}+4$ のとき $\sqrt{6}a-1 \leqq x \leqq 2a+3$
$2\sqrt{6}+4<a$ のとき解なしです。

整数解 x が 1 つだけとなる可能性があるのは $1<a \leqq 2\sqrt{6}+4$ のときです。
整数 a で $\sqrt{6}a-1 \leqq x \leqq 2a+3$ は、整数解を少なくとも 1 つ $x=2a+3$ を持ちます。

整数解が $x=2a+3$ だけとなるのは $2a+2<\sqrt{6}a-1 \leqq x \leqq 2a+3$ の場合です。
よって $6.67\cdots=\dfrac{3\sqrt{6}+6}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-2}<a \leqq 2\sqrt{6}+4=8.89\cdots$ です。

以上より、整数解 x が 1 つだけであるのは整数 $a=7,8$ のときです。