

2026 年上智大学経済学部問題 1

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)^{2026}$ を $x^2 + 1$ で割った余り $R(x)$ を求めてください。

解説・解答

二次式 $x^2 + 1$ で割った余りなので $R(x) = ax + b$ (a, b は実数) と置きます。

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ なので、商を $Q(x)$ と置けば
 $\left(x \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}\right)^{2026} = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$ です。

$x = i$ を代入すると $x^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ なので
 $\left(i \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}\right)^{2026} = ai + b$ です。

ド・モアブルの定理より $\left(i \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}\right)^{2026} = i \sin \frac{2026\pi}{3} + \cos \frac{2026\pi}{3}$ なので
 $a = \sin \frac{2026\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \cos \frac{2026\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ です。

以上より $R(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$ です。