

2026年一橋大学問題 1

$|x^2 - 7x + 1| = y^2$ ,  $y > 0$  を満たす整数の組  $(x, y)$  を求めてください。

## 解説・解答

$x^2 - 7x + 1 = 0$  の解は  $x = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2} = 0.2\dots, 6.7\dots$  です。

$x^2 - 7x + 1 \leq 0$  のとき  $-(x^2 - 7x + 1) = y^2$ ,  $1 \leq x \leq 6$ ,  $y \geq 1$   
 $(2y)^2 = -4(x^2 - 7x + 1) = -(2x - 7)^2 + 45 \leq 45$  より  $y = 1, 2, 3$  です。

$y = 1$  の場合  $x^2 - 7x + 2 = 0$  を満たす整数  $x$  はありません。

$y = 2$  の場合  $x^2 - 7x + 5 = 0$  を満たす整数  $x$  はありません。

$y = 3$  の場合  $x^2 - 7x + 10 = 0$  より  $x = 2, 5$  です。

$x^2 - 7x + 1 \geq 0$  のとき  $x^2 - 7x + 1 = y^2$ ,  $x \leq 0$ ,  $7 \leq x$ ,  $y \geq 1$

$4(x^2 - 7x + 1) = 4y^2$  より  $(2x - 7)^2 - (2y)^2 = 45$  です。

$45 = (2x - 7)^2 - (2y)^2 \geq (2y + 1)^2 - (2y)^2 = 4y + 1$  より  $1 \leq y \leq 11$  です。

$(2y)^2 + 45$  が平方数となるものを探すと

$2^2 + 45 = 7^2$ ,  $6^2 + 45 = 9^2$ ,  $22^2 + 45 = 23^2$  なので  $y = 1, 3, 11$  です。

$y = 1$  の場合  $2x - 7 = \pm 7$  より  $x = 0, 7$  です。

$y = 3$  の場合  $2x - 7 = \pm 9$  より  $x = -1, 8$  です。

$y = 11$  の場合  $2x - 7 = \pm 23$  より  $x = -8, 15$  です。

以上より

$(x, y) = (-8, 11), (-1, 3), (0, 1), (2, 3), (5, 3), (7, 1), (8, 3), (15, 11)$  です。