2025 年早稲田大学人間科学部問題 4

k は実数の定数、z についての方程式 $z^3-5z^2+kz-5=0$ の 3 つの解は複素数平面上で斜辺の長さ 2 の直角三角形となります。k の値を求めてください。

解説・解答

方程式 $z^3-5z^2+kz-5=0$ の 3 つの解は
複素数平面上で斜辺の長さ 2 の直角三角形なのでこの方程式は虚数解を持ち、
実数係数の 3 次方程式なので 1 つの実数解と共役な虚数解を持ちます。
a,b,c を実数として解を $z=a,\ b\pm ci$ と置き、
複素数平面上で点 $A(a),B(b+ci),C(b-ci)$ とします。

$AB^2=AC^2=(a-b)^2+c^2$ なので
三角形 ABC は $AB=AC,\ BC=2$ の直角二等辺三角形です。
$BC=2c=2$ より $c=1$ です。
$AB:BC=1:\sqrt{2}$ より $AB=\sqrt{2}$ です。
$AB^2=(a-b)^2+1=2$ より $|a-b|=1$ です。

解と係数の関係より
$5=a+(b+ci)+(b-ci)=a+2b$
$k=a(b+ci)+(b+ci)(b-ci)+(b-ci)a=2ab+b^2+c^2=2ab+b^2+1$
$5=a(b+ci)(b-ci)=a(b^2+c^2)=ab^2+a$

$a+2b=5,\ ab^2+a=5$ より $(a,b)=(1,2),(0,5)$ です。
$|a-b|=1$ なので $(a,b)=(1,2)$ です。
よって $k=2\cdot1\cdot2+2^2+1=9$ です。