2025 **年早稲田大学教育学部問題** 4

α は正の実数 , $f(x) = (x^3 - x + 2)e^{-x}$ です。
曲線 $y = f(x)$, x 軸, y 軸, 直線 $x = \alpha$ で囲まれる部分の面積 $S(\alpha)$ を求めてください。

解説・解答

$f(x)$ を微分して、増減を調べて $y=f(x)$ のグラフを考えます。
$f'(x)=(3x^2-1)e^{-x}-(x^3-x+2)e^{-x}=-(x+1)(x-1)(x-3)e^{-x}$
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$ 極大値 $f(-1)=2e,$ 極小値 $f(1)=2e^{-1},$ 極大値 $f(3)=26e^{-3},$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

範囲 $0\leqq x\leqq\alpha$ で $f(x)=(x^3-x+2)e^{-x}>0$ です。

部分積分を繰返し使います。

$$
\begin{aligned}
S(\alpha)&=\int_0^\alpha(x^3-x+2)e^{-x}dx\\
&=\Big[-(x^3-x+2)e^{-x}\Big]_0^\alpha+\int_0^\alpha(3x^2-1)e^{-x}dx\\
&=2-(\alpha^3-\alpha+2)e^{-\alpha}+\Big[-(3x^2-1)e^{-x}\Big]_0^\alpha+\int_0^\alpha 6xe^{-x}dx\\
&=1-(\alpha^3+3\alpha^2-\alpha+1)e^{-\alpha}+\Big[-6xe^{-x}\Big]_0^\alpha+\int_0^\alpha 6e^{-x}dx\\
&=1-(\alpha^3+3\alpha^2+5\alpha+1)e^{-\alpha}+\Big[-6e^{-x}\Big]_0^\alpha\\
&=7-(\alpha^3+3\alpha^2+5\alpha+7)e^{-\alpha}
\end{aligned}
$$