

2025年早稲田大学商学部問題1

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = a_{2025} = 0$, $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = -1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を満たしています。
一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = -1$ は $(a_{n+1} - a_n) = (a_n - a_{n-1}) - 1$ に式変形できるので
数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は公差 -1 の等差数列です。

よって $a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1) + (-1) \cdot (n - 1) = a_2 + 1 - n$ です。

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_2 + 1 - k) \\ &= (a_2 + 1)(n - 1) - \frac{(n - 1)n}{2} \\ &= \frac{(n - 1)(2a_2 + 2 - n)}{2} \\ &\quad (\text{この式は } n = 1 \text{ でも成り立っています}) \end{aligned}$$

$a_{2025} = 0$ より $\frac{(2025 - 1)(2a_2 + 2 - 2025)}{2} = 0$ なので $2a_2 + 2 = 2025$ です。

以上より $a_n = \frac{(n - 1)(2025 - n)}{2}$ です。