**$2025$年東京大学理系問題 $2$**

次の極限を求めてください。

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$$

**解説・解答**

相加平均・相乗平均の関係を使います。

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx \geqq \lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\sqrt{x^{\frac{1}{n}}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{\log x}{2}dx = \log 2 - \frac{1}{2}$$

$f(t) = (t-1) - \log t$ を考え、微分して $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t}$ 増減を調べます。

$0 < t < 1$ で減少, 極小 $f(1) = 0$. $1 < t$ で増加 なので $t > 0$ で $\log t \leqq t - 1$ です。

$$n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx \leqq n\int_1^2 \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} - 1\right)dx = \frac{2n^2\cdot 2^{\frac{1}{n}} - 2n^2 - n}{2(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\right)$$

$g(x) = 2^x$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{g(\frac{1}{n}) - g(0)}{\frac{1}{n}} = g'(0) = \log 2$ です。

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx \leqq \log 2 - \frac{1}{2}$ です。

以上より、はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx = \log 2 - \frac{1}{2}$ です。