2025 年東京大学文系問題 3

最初、白玉 2 個が横一列に並んでいます。
コインを投げて表なら白玉、裏なら黒玉を列の右端に新たに置き、
新たに置いた玉が左隣の玉の色と異なり、もうひとつ左隣の玉の色と一致するとき、
左隣の玉を新たに置いた玉と同じ色の玉にとりかえます。
この操作を n 回行った後、右端 2 玉がともに白玉である確率を求めてください。

解説・解答

n 回後に右端が 白白, 白黒, 黒白, 黒黒 である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とします。
$a_0 = 1, b_0 = c_0 = d_0 = 0,\ a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ です。

$n+1$ 回後に右端が白白となるのは
n 回後に右端が 白白, 白黒, 黒白 でコインが表の場合です。
よって $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{2} = \dfrac{1 - d_n}{2}$ です。

$n+1$ 回後に右端が黒黒となるのは
n 回後に右端が 白黒, 黒白, 黒黒 でコインが裏の場合です。
よって $d_{n+1} = \dfrac{b_n + c_n + d_n}{2} = \dfrac{1 - a_n}{2}$ です。

$a_{n+1} - d_{n+1} = \dfrac{1 - d_n}{2} - \dfrac{1 - a_n}{2} = \dfrac{1}{2}\big(a_n - d_n\big)$ なので
$a_n - d_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \big(a_0 - d_0\big) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ です。

$a_{n+1} + d_{n+1} = \dfrac{1 - d_n}{2} + \dfrac{1 - a_n}{2} = 1 - \dfrac{a_n + d_n}{2}$ は
$a_{n+1} + d_{n+1} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n + d_n - \dfrac{2}{3}\right)$ に式変形できるので
$a_n + d_n = \dfrac{2}{3} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \left(a_0 + d_0 - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ です。

$$a_n = \frac{(a_n - d_n) + (a_n + d_n)}{2} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

以上より、求める確率は $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ です。