*2025* **年札幌医科大学問題** *1*

半径 1 の円に内接する正五角形の面積を $S$ とします。
$S^2$ の値を求めてください。

**解説・解答**

$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ のとき $\cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos 2\theta$ です。
$\cos 3\theta-\cos 2\theta=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-(2\cos^2\theta-1)=(\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$
$0<\cos\theta<1$ なので $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ です。
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$ です。

半径 $1$ の円に内接する正五角形の隣り合う頂点を $A, B$ とし、円の中心点を $P$ とします。
$AP=BP=1$, $\angle APB=\dfrac{2\pi}{5}=\theta$ です。
$(\text{三角形 } ABP \text{ の面積})=\dfrac{AP\cdot BP\sin\angle APB}{2}=\dfrac{\sin\theta}{2}$ です。
$S^2=\left\{5\cdot(\text{三角形 } ABP \text{ の面積})\right\}^2=\dfrac{25\sin^2\theta}{4}=\dfrac{125+25\sqrt{5}}{32}$ です。