

2025年立命館大学理系問題1

三角形 ABC の3辺の和が6で、 BC は AB より1大きいです。

三角形 ABC の面積の最大値を求めてください。

解説・解答

$AB + BC + CA = 6$, $BC = AB + 1$ なので
 $AB = x$ と置くと $BC = x + 1$, $CA = 5 - 2x$ です。

三角不等式 $|AB - BC| < CA < AB + BC$ より
 $1 < 5 - 2x < 2x + 1$ なので $1 < x < 2$ です。

ヘロンの公式を使います。 $s = \frac{AB + BC + CA}{2} = 3$
 $\triangle ABC = \sqrt{s(s - AB)(s - BC)(s - CA)} = \sqrt{6(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$ です。

$f(x) = 6(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 6(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$ と置き、微分して増減を調べます。

$f'(x) = 6(3x^2 - 12x + 11) = 18\left(x - \frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)$
 $1 < x < \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$ で増加, 極大 $f\left(\frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\frac{6 - \sqrt{3}}{3} < x < 2$ で減少です。

以上より、三角形 ABC の面積の最大値は $\sqrt{f\left(\frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ です。