

2025年立命館大学文系問題 2

a, p, q は $a > 1$, $p > q$ を満たす実数です。

$(a^p + a^{-p})(a^q + a^{-q}) = 12$, $(a^p - a^{-p})(a^q - a^{-q}) = -8$ のとき
 a^p の値を求めてください。

解説・解答

$$(a^p + a^{-p})(a^q + a^{-q}) = 12 \text{ を展開して } a^{p+q} + a^{-(p+q)} + a^{p-q} + a^{-(p-q)} = 12 \cdots (1)$$

$$(a^p - a^{-p})(a^q - a^{-q}) = -8 \text{ を展開して } a^{p+q} + a^{-(p+q)} - a^{p-q} - a^{-(p-q)} = -8 \cdots (2)$$

$\{(1) + (2)\} \div 2$ より $a^{p+q} + a^{-(p+q)} = 2$ です。

両辺に a^{p+q} を掛け、整理すると $(a^{p+q} - 1)^2 = 0$ にできます。

よって $a^{p+q} = 1$ なので $p + q = 0$ です。

$a > 1, p > q, p + q = 0$ より $p > 0, a^p > 1$ です。

$p - q = p - q + (p + q) = 2p > 0$ です。

$\{(1) - (2)\} \div 2$ より $a^{p-q} + a^{-(p-q)} = a^{2p} + a^{-2p} = 10$ です。

両辺に a^{2p} を掛け、整理すると $(a^{2p} - 5)^2 = 24$ にできるので $a^{2p} = 5 \pm \sqrt{24}$ です。

$4 < \sqrt{24} < 5, a^{2p} > 1$ なので $a^{2p} = 5 + \sqrt{24} = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ です。

$a^p > 1$ なので $a^p = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ です。