2025 **年大阪大学理系問題** 5

最初の文字列は ABC です。
コインを投げて表なら左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえ、
裏なら左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえます。
この操作を n 回行った後に文字列が ABC である確率を求めてください。

解説・解答

操作によって文字列は次のように変化します。
$\leftrightarrow CBA \leftrightarrow CAB \leftrightarrow ACB \leftrightarrow ABC \leftrightarrow BAC \leftrightarrow BCA \leftrightarrow CBA \leftrightarrow$
奇数回後は ACB, BAC, CBA のいずれか、
偶数回後は ABC, BCA, CAB のいずれかです。

$2k$ 回後に ABC, BCA, CAB である確率をそれぞれ p_{2k}, q_{2k}, r_{2k} とします。
最初の文字列が ABC なので $p_0 = 1$ です。
偶数回後は ABC, BCA, CAB のいずれかなので $p_{2k} + q_{2k} + r_{2k} = 1$ です。

$2(k+1)$ 回後に ABC と成るのは次の 4 パターンです。
$2k$ 回後に $ABC \to BAC \to ABC$,　$2k$ 回後に $ABC \to ACB \to ABC$
$2k$ 回後に $BCA \to BAC \to ABC$,　$2k$ 回後に $CAB \to ACB \to ABC$
よって
$$\begin{aligned} p_{2(k+1)} &= p_{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + q_{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + r_{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(2p_{2k} + q_{2k} + r_{2k}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(p_{2k} + 1\right) \end{aligned}$$
この式は $p_{2(k+1)} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}\left(p_{2k} - \dfrac{1}{3}\right)$ に式変形できます。
よって $p_{2k} - \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^k \left(p_0 - \dfrac{1}{3}\right)$ なので $p_{2k} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k} + \dfrac{1}{3}$ です。

以上より、求める確率は n が奇数なら 0, n が偶数なら $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{3}$ です。