

2025 年大阪大学文系問題 2

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定めます。

正の整数 m に対して $\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} = 1$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

$$S_m = \sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} \text{ と置きます。}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 a_k a_{1-k+1} = a_1 a_1 = 1 \text{ です。}$$

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{(2k-1) + (2m-2k+1)}{2m} a_k a_{m-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{2k-1}{2m} \cdot a_k a_{m-k+1} + \frac{2m-2k+1}{2m} \cdot a_k a_{m-k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{k} \cdot \frac{2k-1}{2m} \cdot a_k a_{m-k+1} + \frac{2m-2k+1}{2m} \cdot \frac{m-k+1}{m-k+1} \cdot a_k a_{m-k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{2k-1}{2k} a_k \cdot \frac{k}{m} a_{m-k+1} + \frac{m-k+1}{m} a_k \cdot \frac{2(m-k+1)-1}{2(m-k+1)} a_{m-k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(a_{k+1} \cdot \frac{k}{m} a_{m-k+1} + \frac{m-k+1}{m} a_k \cdot a_{m-k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(a_{k+1} \cdot \frac{k}{m} a_{m-k+1} - \frac{k-1}{m} a_k \cdot a_{m-k+2} + a_k a_{m-k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(b_{k+1} - b_k + a_k a_{(m+1)-k+1} \right) \quad \left(b_k = \frac{k-1}{m} a_k a_{m-k+2} \text{ と置く } \right) \\ &= b_{m+1} - b_1 + \sum_{k=1}^m a_k a_{(m+1)-k+1} \\ &= a_{m+1} a_1 - 0 + \sum_{k=1}^m a_k a_{(m+1)-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} a_k a_{(m+1)-k+1} = S_{m+1} \end{aligned}$$

$S_1 = 1$, $S_{m+1} = S_m$ なので $S_m = 1$ です。

以上より $\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} = 1$ です。