2025 **年新潟大学理系問題** *3*

二次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して
$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とします。
自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = a_n a_{n+1} + 2$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

二次方程式 $x^2-x-1=0$ の解と係数の関係より $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$ です。
$a_1=\alpha^0+\beta^0=2,\quad a_2=\alpha+\beta=1$

$x^2=x+1$ なので $\alpha^2=\alpha+1,\ \beta^2=\beta+1$ です。
$a_{n+2}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^{n-1}(\alpha+1)+\beta^{n-1}(\beta+1)=(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})=a_{n+1}+a_n$

$n=1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}{a_k}^2={a_1}^2=2^2=4=2\cdot 1+2=a_1a_2+2$ なので成り立ちます。
$n=m$ (m は自然数) で成り立つ $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}{a_k}^2=a_ma_{m+1}+2$ とすれば
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}{a_k}^2=\sum_{k=1}^{m}{a_k}^2+a_{m+1}^2=(a_ma_{m+1}+2)+a_{m+1}^2=a_{m+1}(a_m+a_{m+1})+2=a_{m+1}a_{m+2}+2$
よって $n=m+1$ でも成り立ちます。

数学的帰納法により、全ての自然数 n で $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=a_na_{n+1}+2$ が成り立ちます。