

2025年新潟大学文系問題 2

二次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ に対して
 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とします。
 a_9 の値を求めてください。

解説・解答

二次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解と係数の関係より $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ です。

$$a_1 = \alpha + \beta = 1$$

$$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$$

$x^2 = x + 1$ なので $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\beta^2 = \beta + 1$ です。

$$a_{n+2} = \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = \alpha^n(\alpha + 1) + \beta^n(\beta + 1) = (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + (\alpha^n + \beta^n) = a_{n+1} + a_n$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 4 + 3 = 7$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 7 + 4 = 11$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 11 + 7 = 18$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 18 + 11 = 29$$

$$a_8 = a_7 + a_6 = 29 + 18 = 47$$

$$a_9 = a_8 + a_7 = 47 + 29 = 76$$

以上より $a_9 = 76$ です。