

2025年名古屋大学文系問題 2

n は正の整数、 p は 3 以上の素数です。

$a^2 - b^2 = 4p^{2n}$ を満たす非負整数の組 (a, b) を求めてください。

解説・解答

a, b が非負整数で $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 4p^{2n} > 0$ なので
 $a + b \geqq a - b > 0, a > b \geqq 0$ です。

整数に偶数を加えても偶奇は変わらないので $a - b$ と $a + b = (a - b) + 2b$ の偶奇は同じ
 $(a - b)(a + b)$ が 4 の倍数なので $a - b$ と $a + b$ は共に偶数です。

3 以上の素数 p は奇数で $(a - b)(a + b) = 4p^{2n}$ なので
 $(a - b, a + b) = (2p^{n-k}, 2p^{n+k})$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) です。

$$\begin{aligned}(a, b) &= (\{(a + b) + (a - b)\} \div 2, \{(a + b) - (a - b)\} \div 2) \\ &= (p^{n+k} + p^{n-k}, p^{n+k} - p^{n-k}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \text{ です。}\end{aligned}$$