

2025 年京都大学理系問題 1

$i$  は虚数単位です。

$z$  が絶対値 2 の複素数全体を動くとき  $\left| z - \frac{i}{z} \right|$  の最大値と最小値を求めてください。

## 解説・解答

$z$  が絶対値 2 の複素数全体を動くので  $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) と置きます。

$$\begin{aligned} \left| z - \frac{i}{z} \right|^2 &= \left| 2(\cos \theta + i \sin \theta) - \frac{i}{2(\cos \theta + i \sin \theta)} \right|^2 \\ &= \left| 2(\cos \theta + i \sin \theta) - \frac{\sin \theta + i \cos \theta}{2} \right|^2 \\ &= \left| \left( 2 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{2} \right) + i \left( 2 \sin \theta - \frac{\cos \theta}{2} \right) \right|^2 \\ &= \left( 2 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{2} \right)^2 + \left( 2 \sin \theta - \frac{\cos \theta}{2} \right)^2 \\ &= 4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 4 \sin \theta \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{4} \\ &= \frac{17}{4} - 2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

$\sin 2\theta = -1$  のときに最大になり、 $\sin 2\theta = 1$  のときに最小になります。

以上より  $\left| z - \frac{i}{z} \right|$  の最大値は  $\sqrt{\frac{17}{4} + 2} = \frac{5}{2}$ ，最小値は  $\sqrt{\frac{17}{4} - 2} = \frac{3}{2}$  です。