

2025年京都大学理系問題 2

正の整数 x, y, z を用いて $N = x^6 + y^4 = 9z^2$ と表される最小の N を求めてください。

解説・解答

$\{(3 \text{ の倍数}) \pm 1\}^4 = (3 \text{ の倍数}) + 1$, $\{(3 \text{ の倍数}) \pm 1\}^6 = (3 \text{ の倍数}) + 1$ なので
 $N = x^6 + y^4 = 9z^2$ を満たす x, y は 3 の倍数に限られます。

$x^6 + y^4$ の値が小さいものから順に調べます。

$(x, y) = (3, 3)$ のとき $N = 3^6 + 3^4 = (3^2 + 1) \cdot 3^4 = 2 \cdot 5 \cdot 3^4$ なので不適です。

$(x, y) = (3, 6)$ のとき $N = 3^6 + 6^4 = (3^2 + 2^4) \cdot 3^4 = 5^2 \cdot 3^4 = 9 \cdot 15^2$ より $z = 15$ です。

以上より、条件を満たす最小なものは $N = 3^6 + 6^3 = 9 \cdot 15^2 = 2025$ です。