

2025年京都大学文系問題 1

$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n を求めてください。

解説・解答

$\frac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3} = n^2 - n + 4 + \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3}$ なので
 $\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3}$ が整数となる正の整数 n を求めれば良いです。

$\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \leq -1$ のとき
 $-n + 11 \leq -(n^2 + n + 3)$ より $n^2 \leq -14$ なので条件を満たす n はありません。

$\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} = 0$ のとき
 $-n + 11 = 0$ より $n = 11$ です。

$\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} = 1$ のとき
 $-n + 11 = n^2 + n + 3$ より $(n - 2)(n + 4) = 0$ なので $n = 2$ です。

$\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} = 2$ のとき
 $-n + 11 = 2(n^2 + n + 3)$ より $(n - 1)(2n + 5) = 0$ なので $n = 1$ です。

$\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \geq 3$ のとき
 $-n + 11 \geq 3(n^2 + n + 3)$ より $(3n + 4)n \leq 2$ なので条件を満たす n はありません。

以上より $n = 1, 2, 11$ です。