2025年京都大学文系問題 3

硬貨を投げて表なら $1,$ 裏なら 2 と記録します。
この試行を n 回繰返し、記録された順に左から並べて n 桁の数 x_n を作ります。
x_n が 6 で割り切れる確率 p_n を求めてください。

解説・解答

$x_1=1,2$ なので $p_1=0$ です。

x_n を 3 で割った余りが $0,1,2$ である場合をそれぞれ A_n,B_n,C_n とし、
A_n,B_n,C_n となる確率をそれぞれ a_n,b_n,c_n とします。
$a_1=0\,,\ b_1=c_1=\dfrac{1}{2}\,,\quad a_n+b_n+c_n=1$

A_n,B_n,C_n の次に 1 ならそれぞれ B_{n+1},C_{n+1},A_{n+1} になり、
2 ならそれぞれ $C_{n+1},A_{n+1},B_{n+1},$ になります。
よって $a_{n+1}=\dfrac{b_n+c_n}{2}\,,\ b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}\,,\ c_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ です。

$b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}=\dfrac{(a_n+b_n+c_n)-b_n}{2}=\dfrac{1-b_n}{2}$
$b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\Big(b_n-\dfrac{1}{3}\Big)$ に式変形できるので $b_n-\dfrac{1}{3}=\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big(b_1-\dfrac{1}{3}\Big)$ です。
よって $b_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}=\dfrac{1}{3}\Big\{1-\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n}\Big\}$ です。

6 で割り切れるのは偶数かつ 3 で割り切れるときなので、
x_n が 6 で割り切れるのは B_{n-1} の次に 2 がくる場合です。
$n\geqq 2$ のとき $p_n=b_{n-1}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\Big\{1-\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big\}\quad(n=1$ でも成立$)$

以上より $p_n=\dfrac{1}{6}\Big\{1-\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big\}$ です。