2025 **年九州大学理系問題** 4

半径 1 の円周上に反時計回りに点 A, B, C, D をとり AC と BD の交点を E とします。
AD が直径 , $AB = BC,\ AC = CD$ のとき、三角形 BCE の面積を求めてください。

解説・解答

半径 1, AD は直径なので $AD=2$ です。
直径に対する円周角は $\angle ABD=\angle ACD=90°$ です。

$AC=CD$ よりで三角形 ACD は直角二等辺三角形なので
$AC=CD=\sqrt{2}$, $\angle CDA=\angle DAC=45°$ です。

$AB=BC$ より円周角 $\angle ADB=\angle BDC$ なので BC は $\angle CDA$ の二等分線です。
よって、三角形 ACD で $AE:EC=AD:CD=2:\sqrt{2}=\sqrt{2}:1$ です。
$AC:AE=(AE+EC):AE=(\sqrt{2}+1):1$ です。

三角形 ABC で余弦定理を使い $AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 135°={\sqrt{2}}^2$ です。
$AB=BC$ なので $AB\cdot BC=AB^2=BC^2=2-\sqrt{2}$ です。

四角形 $ABCD$ は円に内接する四角形なので、向かい合う角の和は $180°$ です。
$\angle ABC=180°-\angle CDA=135°$ です。

$$(\text{三角形ABCの面積})=\frac{AB\cdot BC\sin\angle ABC}{2}=\frac{(2-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\text{ です。}$$

$$(\text{三角形ABCの面積}):(\text{三角形BCEの面積})=AC:AE=(\sqrt{2}+1):1\text{ です。}$$
$$(\text{三角形BCEの面積})=(\text{三角形ABCの面積})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\text{ です。}$$