

2025 年九州大学文系問題 4

サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とし $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ とします。
 $f(x) = 0$ を満たす x が自然数 3 個である確率を求めてください。

解説・解答

サイコロの出目なので a, b, c は 1 以上 6 以下の自然数です。

$x^2 - ax + b = 0$ より $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ です。

x が異なる自然数になるのは $\sqrt{a^2 - 4b}$ が自然数で、 a と $\sqrt{a^2 - 4b}$ の偶奇が同じときです。

$a^2 - 4b \geq 1^2$ より $a \geq 3$ です。

$\sqrt{a^2 - 4b} < a \leq 6$ なので、自然数 x は 2 個とも $1 \leq x \leq a - 1 \leq 5$ の範囲にあります。

$a^2 - 4b = 1^2$ のとき $(a, b) = (3, 2), (5, 6)$ です。

$a^2 - 4b = 2^2$ のとき $(a, b) = (4, 3)$ です。

$a^2 - 4b = 3^2$ のとき $(a, b) = (5, 4)$ です。

$a^2 - 4b = 4^2$ のとき $(a, b) = (6, 5)$ です。

$a^2 - 4b = 5^2$ のとき、条件を満たす (a, b) はありません。

$(a, b) = (3, 2)$ のとき $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c) = 0$ を満たすのは $x = 1, 2, c$ で、3 個の自然数となるのは $c = 3, 4, 5, 6$ の 4 通りあります。

同様に $(a, b) = (5, 6), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$ のときもそれぞれ 4 通りあります。

よって、条件を満たす (a, b, c) は $5 \cdot 4 = 20$ 通りあります。

以上より、求める確率は $\frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}$ です。