

2025年九州大学文系問題 3

$2^m = n^2 + 3$  を満たす整数の組  $(m, n)$  を求めてください。

## 解説・解答

$2^m = n^2 + 3 \geq 3$  より  $m \geq 2$  です。

$m = 2$  のとき

$2^2 = n^2 + 3$  より  $n = \pm 1$  です。

$m \geq 3$  のとき

$2^m$  は 8 で割り切れます。

整数を 4 で割った余りで分け  $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$  ( $k$  は整数) の二乗を計算します。

$$(4k)^2 = 8 \cdot 2k^2, \quad (4k+1)^2 = 8(2k^2 + k) + 1,$$

$$(4k+2)^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4, \quad (4k+3)^2 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1$$

よって、整数の二乗を 8 で割った余りは 0, 1, 4 に限られます。

$n^2 + 3$  を 8 で割った余りは 3, 4, 7 などの  $2^m \neq n^2 + 3$  です。

以上より  $(m, n) = (2, \pm 1)$  です。