

2025 年九州大学文系問題 3

$2^m = n^2 + 3$ を満たす整数の組 (m, n) を求めてください。

解説・解答

$2^m = n^2 + 3 \geq 3$ より $m \geq 2$ です。

$m = 2$ のとき

$2^2 = n^2 + 3$ より $n = \pm 1$ です。

$m \geq 3$ のとき

2^m は 8 で割り切れます。

整数を 4 で割った余りで分け $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ (k は整数) の二乗を計算します。

$$(4k)^2 = 8 \cdot 2k^2, \quad (4k+1)^2 = 8(2k^2+k) + 1,$$

$$(4k+2)^2 = 8(2k^2+2k) + 4, \quad (4k+3)^2 = 8(2k^2+3k+1) + 1$$

よって、整数の二乗を 8 で割った余りは 0, 1, 4 に限られます。

$n^2 + 3$ を 8 で割った余りは 3, 4, 7 なの $2^m \neq n^2 + 3$ です。

以上より $(m, n) = (2, \pm 1)$ です。