2025 **年九州大学文系問題** 2

半径 1 の円周 C 上の 2 点 A, B は $AB = \sqrt{3}$ です。
点 P が円周 C 上を動くとき $AP^2 + BP^2$ の最大値を求めてください。

解説・解答

円周 C の中心点を $O,\ AB$ の中点を H と置きます。
三角形 OAH は $OA=1,\ AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の直角三角形なので $OH=\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}$ です。

座標平面上の $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), B(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}), P(\cos\theta,\sin\theta)$ で計算すれば良いです。

$$\begin{aligned}AP^2+BP^2 &= \{(\cos\theta-\tfrac{1}{2})^2+(\sin\theta-\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2\}+\{(\cos\theta-\tfrac{1}{2})^2+(\sin\theta+\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2\}\\ &= (2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)+(2-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\\ &= 4-2\cos\theta\\ &\leqq 6 \quad (\cos\theta=-1 \text{ で等号成立})\end{aligned}$$

以上より AP^2+BP^2 の最大値は 6 です。