2025 **年神戸大学理系問題** 2

$a_n = \sqrt{n^2+1} - n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とし、b_n を $3n - \dfrac{1}{a_n}$ の小数部分とします。
m, n を異なる自然数とするとき $a_m + b_n \neq 1$ であることを示してください。

解説・解答

$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)} = \sqrt{n^2+1}+n$ です。

$3n - \dfrac{1}{a_n} = 3n - (\sqrt{n^2+1}+n) = 2n - \sqrt{n^2+1}$ です。

$n < \sqrt{n^2+1} < n+1$ なので $n-1 < 2n-\sqrt{n^2+1} < n$ です。

b_n は $2n-\sqrt{n^2+1}$ の小数部分なので
$b_n = (2n-\sqrt{n^2+1}) - (n-1) = n+1-\sqrt{n^2+1}$ です。

$$\begin{aligned} a_m + b_n - 1 &= \sqrt{m^2+1} - \sqrt{n^2+1} - m + n \\ &= \frac{(m^2+1)-(n^2+1)}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}} - m + n \\ &= \frac{(m-n)(m+n)}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}} - (m-n) \\ &= (m-n)\Big(\frac{m+n}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}} - 1\Big) \end{aligned}$$

$\dfrac{m+n}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}} < \dfrac{m+n}{m+n} = 1$ なので $\dfrac{m+n}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}} - 1 \neq 0$ です。

以上より m, n が異なる自然数なら $a_m + b_n \neq 1$ です。