2025 **年神戸大学文系問題** 2

$a_n = \sqrt{n^2+1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とし、b_n を a_n の小数部分とします。
m, n を異なる自然数とするとき $b_m \neq b_n$ であることを示してください。

解説・解答

$n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$ より $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$ なので
$n < a_n < n+1$ です。

b_n は a_n の小数部分なので
$b_n = a_n - n = \sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ です。

数列 $\{\sqrt{n^2+1}+n\}$ は増加数列なので数列 $\{b_n\}$ は減少数列です。
$1 > b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > 0$
よって、数列 $\{b_n\}$ の項は全て異なる値です。

以上より m, n が異なる自然数なら $b_m \neq b_n$ です。