2025 **年関西学院大学理系問題** *3*

関数 $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{\sin x}\ \left(\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考えます。

曲線 $C : y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めてください。

解説・解答

$$f(x)=\frac{\sin 4x}{\sin x}=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin x}=\frac{4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)}{\sin x}=4\cos x(1-2\sin^2 x)$$

範囲 $\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $4\cos x(1-2\sin^2 x)=0$ の解は $x=\dfrac{\pi}{4}.\ \dfrac{\pi}{2}$ です。

範囲 $\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $4\cos x(1-2\sin^2 x)\leqq 0$ です。

$$\begin{aligned}
S&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big|4\cos x(1-2\sin^2 x)\Big|dx\\
&=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos x(1-2\sin^2 x)dx\\
&=-4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 x)(\sin x)'dx\\
&=-4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(1-2t^2)dt\qquad(t=\sin x\text{ に置換})\\
&=-4\Big[t-\frac{2}{3}t^3\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\\
&=\frac{4\sqrt{2}-4}{3}
\end{aligned}$$