

2025 年関西学院大学理系問題 2

数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$ を考えます。

分母が $m+1$ で分子が 1 から m までの分数を並べたものを第 m 群とします。

数列の初項から第 n 項までの和が初めて 2025 をこえるのは

第 n 項が第何群に属するときですか。

解説・解答

第 m 群に含まれる項の和は

$$\frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+1} + \frac{3}{m+1} + \cdots + \frac{m}{m+1} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{m}{2} \text{ です。}$$

数列の初項から第 m 群の最後の項までの和は

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{m}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m(m+1)}{4} \text{ です。}$$

$$\frac{m(m+1)}{4} > 2025 \text{ より } m(m+1) > 4 \cdot 2025 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 90^2 \text{ です。}$$

$89 \cdot 90 < 90^2 < 90 \cdot 91$ なので、

初めて 2025 をこえるのは第 89 群の最後の項より後で、第 90 群の最後の項より前です。

以上より、条件を満たすのは第 n 項が第 90 群に属するときです。