2025 **年慶應義塾大学薬学部問題** *1*

$f(x)=x^2-ax+a+2$ は全ての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ です。
範囲 $-2\leqq x\leqq 3$ での $f(x)$ の最小値を m, 最大値を M とします。
m が最大となるときの実数 a と、そのときの m,M を求めてください。

解説・解答

$f(x)=x^2-ax+a+2=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a+2$
$f(x)$ のグラフは頂点 $\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{4}+a+2\right)$, 下に凸な放物線です。

$f(x)\geqq 0$ なので $-\dfrac{a^2}{4}+a+2\geqq 0$ より $1-\sqrt{2}\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1+\sqrt{2}$ です。

$-2<1-\sqrt{2}<1+\sqrt{2}<3$ なので範囲 $-2\leqq x\leqq 3$ に頂点が含まれます。
$f(x)$ は頂点で最小なので $m=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+a+2=3-\left(\dfrac{a}{2}-1\right)^2$ です。
よって $a=2$ のときに m は最大になります。

$a=2$ のとき $f(x)=(x-1)^2+3$
範囲 $-2\leqq x\leqq 3$ で $f(x)$ は頂点 $(1,3)$ で最小、頂点から最も遠い点 $(-2,12)$ で最大です。
よって $m=3,\ M=12$ です。