2025 **年慶應義塾大学理工学部問題** *1*

1 から n までの自然数の中で 6 または 8 または 9 で割り切れるものの個数を a_n とします。
$a_n = 1000$ を満たす最大の n を求めてください。

解説・解答

$6, 8, 9$ の最小公倍数は 72 です。
72 以下の自然数で $6, 8, 9$ の倍数の集合をそれぞれ A_6, A_8, A_9 とします

$$
\begin{aligned}
&\quad n(A_6 \cup A_8 \cup A_9) \\
&= n(A_6) + n(A_8) + n(A_9) - n(A_6 \cap A_8) - n(A_8 \cap A_9) - n(A_9 \cap A_6) + n(A_6 \cap A_8 \cap A_9) \\
&= \left[\frac{72}{6}\right] + \left[\frac{72}{8}\right] + \left[\frac{72}{9}\right] - \left[\frac{72}{24}\right] - \left[\frac{72}{72}\right] - \left[\frac{72}{18}\right] + \left[\frac{72}{72}\right] = 22
\end{aligned}
$$

よって $6, 8, 9$ の倍数は 72 毎に 22 個あります。

$a_n = 1000$ のとき $1000 = 22 \cdot 45 + 10$
$6, 8, 9$ の倍数を書き出すと $6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 30, 32, 36, \cdots$ なので
10 番目は 32, 11 番目は 36 です。
$72 \cdot 45 + 32 \leqq n < 72 \cdot 45 + 36$ より $n = 3272,\ 3273,\ 3274,\ 3275$ です。

以上より $a_n = 1000$ を満たす最大の n は 3275 です。