

2025 年慶應義塾大学経済学部問題 1

整数 m, n が $|m + n - 6| + |m - n - 2| \leq 6$ を満たすとき $(m - n)(m + n - 6)$ の最大値を求めてください。

解説・解答

$m+n-6 < 0, m-n-2 < 0$ のとき $-(m+n-6) - (m-n-2) \leq 6$ より $1 \leq m$ です。

$m+n-6 < 0, m-n-2 \geq 0$ のとき $-(m+n-6) + (m-n-2) \leq 6$ より $-1 \leq n$ です。

$m+n-6 \geq 0, m-n-2 < 0$ のとき $(m+n-6) - (m-n-2) \leq 6$ より $n \leq 5$ です。

$m+n-6 \geq 0, m-n-2 \geq 0$ のとき $(m+n-6) + (m-n-2) \leq 6$ より $m \leq 7$ です。

よって $1 \leq m \leq 7, -1 \leq n \leq 5$ です。

$$\begin{aligned} & (m-n)(m+n-6) \\ &= m^2 - n^2 - 6m + 6n \\ &= (m^2 - 6m + 9) - (n^2 - 6n + 9) \\ &= (m-3)^2 - (n-3)^2 \end{aligned}$$

$(m-3)^2$ の最大値から $(n-3)^2$ の最小値を引けば良いので
 $(m-n)(m+n-6) \leq (7-3)^2 - (3-3)^2 = 16$ です。

以上より $(m, n) = (7, 3)$ のときに最大値 16 です。