2025 年慶應義塾大学経済学部問題 2

数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2 \cdot (k+2)! \cdot a_k}{3^k \cdot (k-1)!} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ が成り立つとき

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めてください。

解説・解答

$n=1$ のとき

$\dfrac{2\cdot 3!\cdot a_1}{3\cdot 0!}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2$ より $a_1=\dfrac{1}{16}$ なので $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=\dfrac{1}{16}$ です。

$n\geqq 2$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot(k+2)!\cdot a_k}{3^k\cdot(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2\cdot(k+2)!\cdot a_k}{3^k\cdot(k-1)!}=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\left(n-1-\frac{1}{2}\right)^2$ より

$\dfrac{2\cdot(n+2)!\cdot a_n}{3^n\cdot(n-1)!}=2n-2$ なので

$a_n=\dfrac{3^n(n-1)}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{3^n\{3n-(n+2)\}}{2n(n+1)(n+2)}=\dfrac{3^{n+1}}{2(n+1)(n+2)}-\dfrac{3^n}{2n(n+1)}$ です。

$$
\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k\\
&=a_1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3^{k+1}}{2(k+1)(k+2)}-\frac{3^k}{2k(k+1)}\right)\\
&=\frac{1}{16}+\left(\frac{3^{n+1}}{2(n+1)(n+2)}-\frac{3^2}{2\cdot 2\cdot 3}\right)\\
&=\frac{3^{n+1}}{2(n+1)(n+2)}-\frac{11}{16}
\end{aligned}
$$

(この式は $n=1$ でも成り立っています)