2025 **年慶應義塾大学環境情報学部問題** *1*

実数 x について、$\left[\,x\,\right]$ は x を超えない最大の整数です。

$a_n = n - \left[\sqrt{n}\,\right]^2 + 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} a_k$ とします。 S_n を求めてください。

解説・解答

i を整数として $i^2 \leqq n < (i+1)^2$ のとき $\left[\sqrt{n}\,\right] = i$ です。

$(i+1)^2 - i^2 - 1 = 2i$ です。$j = 0, 1, 2, \cdots, 2i$ とします。
$a_{i^2+j} = (i^2+j) - \left[\sqrt{i^2+j}\,\right]^2 + 1 = (i^2+j) - i^2 + 1 = j+1$ です。

$$\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} a_k = \sum_{j=0}^{2i}(j+1) = \frac{(2i+1)(2i+2)}{2} = (2i+1)(i+1) = 2i^2+3i+1$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1^2} a_k = a_1 = 1 - \left[\sqrt{1}\,\right]^2 + 1 = 1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n^2} a_k \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(2i^2+3i+1) + a_{n^2} \\ &= 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) + 1 \\ &= \frac{n\{2(n-1)(2n-1) + 9(n-1) + 6\}}{6} \\ &= \frac{n(4n^2+3n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \end{aligned}$$

(この式は $n = 1$ でも成立しています)