2025 **年広島大学理系問題** 5

i は虚数単位です。
$z_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ を $z_1=\sqrt{3}+2i$, $z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i$ で定めます。
z_n が表す複素数平面上の点を P_n とします。
3 点 P_3, P_5, P_{2025} が一直線上にあることを示してください。

解説・解答

$z_1 - i = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ です。

極形式で $z_n - i = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ と置くと $z_{n+1} - i = 2(z_n - i)^2$ より
$r_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1}) = 2\{r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)\}^2 = 2{r_n}^2(\cos 2\theta_n + i\sin 2\theta_n)$ です。

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta_{n+1} = 2\theta_n$ より $\theta_n = \dfrac{2^{n-1}\pi}{6} = \dfrac{2^{n-2}\pi}{3}$ です。

$\theta_3 = \dfrac{2^{3-2}\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\qquad \theta_5 = \dfrac{2^{5-2}\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi$ です。

$2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16, \cdots$ を 6 で割った余りは $2,\ 4,\ 2,\ 4, \cdots$ で $2,\ 4$ の繰返しです。
$\theta_{2025} = \dfrac{2^{2025-2}\pi}{3} = \dfrac{2^{2023}\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (k は整数) です。

以上より、i が表す複素数平面上の点を P として
点 P を通る偏角 $\dfrac{2\pi}{3}$ の直線上に 3 点 P_3, P_5, P_{2025} はあります。