2025 **年広島大学文系問題** *3*

座標平面上に点 $A(0,2), B(-1,0), C(1,0)$ があります。
以下の規則で点 $P_n, Q_n, R_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ を定めます。

P_1 は直線 AB 上にあり x 座標が 0 です。
P_n を通り y 軸と平行な直線と x 軸との交点を Q_n とします。
Q_n から直線 AC に下した垂線の足を R_n とします。
R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点を P_{n+1} とします。

P_n の x 座標を x_n とします。
$|x_{n+1}-x_n| < 10^{-10}$ を満たす最小の n を求めてください。

解説・解答

P_1 は直線 AB 上にあり x 座標が 0 なので $x_1 = 0$ です。

$A(0,2), B(-1,0), C(1,0)$ より
直線 $AB: y = 2x + 2,$ 直線 $AC: y = -2x + 2$ です。

Q_n は P_n を通り y 軸と平行な直線と x 軸との交点なので $Q_n(x_n, 0)$ です。

直線 Q_nR_n は Q_n を通り直線 AC と直交するので $y = \dfrac{1}{2}(x - x_n)$ です。
R_n は直線 AC と直線 Q_nR_n の交点なので $R_n\left(\dfrac{4 + x_n}{5}, \dfrac{2 - 2x_n}{5}\right)$ です。

P_{n+1} は R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB の交点なので
直線 AB の方程式に R_n の y 座標を代入して $x_{n+1} = \dfrac{-x_n - 4}{5}$ です。

$x_{n+1} = \dfrac{-x_n - 4}{5}$ は $x_{n+1} + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{5}\left(x_n + \dfrac{2}{3}\right)$ に式変形できるので
$x_n = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}\left(x_1 + \dfrac{2}{3}\right) - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}\left\{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\}$ です。

$|x_{n+1} - x_n| = \left|\dfrac{2}{3}\left\{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n} - 1\right\} - \dfrac{2}{3}\left\{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\}\right| = 2^2 \cdot 5^{-n}$ です。

$2^2 \cdot 5^{-n} < 10^{-10} = 2^{-10} \cdot 5^{-10}$ より $5^{n-10} > 2^{12} = 4096$ です。
$3125 = 5^5 < 2^{12} < 5^6 = 15625$ です。

以上より、条件を満たす最小の n は 16 です。