2025 年広島大学文系問題 2

実数 a, b を用いて $f(x)=-x^3-3x^2+4,\ g(x)=x^2+ax+b$ とします。
曲線 $C_1: y=f(x),\ C_2: y=g(x)$ は共有点 P を持ち、点 P において共通接線を持ちます。
点 P の x 座標を t とします。
$t>0$ における $F(t)=\displaystyle\int_0^1\{g(x)-f(x)\}dx$ の最小値を求めてください。

解説・解答

点 P で共通接線を持つので $f'(t)=g'(t)$ です。
$-3t^2-6t=2t+a$ より $a=-3t^2-8t$ です。

点 P は共有点なので $f(t)=g(t)$ です。
$-t^3-3t^2+4=t^2+at+b$ より $b=-t^3-4t^2-at+4=2t^3+4t^2+4$ です。

$$F(t)=\int_0^1\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^1(x^3+4x^2+ax+b-4)dx=\frac{a}{2}+b-\frac{29}{12}=2t^3+\frac{5}{2}t^2-4t+\frac{19}{12}$$

微分して $F'(t)=6t^2+5t-4=(3x+4)(2x-1)$、増減を調べます。
$0<t<\dfrac{1}{2}$ で減少，極小 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{24}$，$\dfrac{1}{2}<t$ で増加です。

以上より、最小値は $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{24}$ です。