

2025 年北海道大学理問題 5

n は 3 以上の整数、 a, b, c は $1 \leq a < b < c \leq 2n$ を満たす整数です。

$a + b > c$ を満たす組 (a, b, c) の個数を L_n とします。

$L_n > {}_nC_3$ であることを示してください。

解説・解答

$a \leq n$ のとき

$(a, b, c) = (n, n+1, 2n)$ は条件 $a+b > c$ を満たします。

よって、条件を満たす組 (a, b, c) が少なくとも 1 つはあります。

$a \geq n+1$ のとき $n+1 \leq a < b < c \leq 2n$

$a+b \geq (n+1) + (n+2) = 2n+3 > 2n \geq c$ なので条件 $a+b > c$ を満たします。

$n+1, n+2, n+3, \dots, 2n$ から 3 個を選んで小さい方から順に a, b, c にすれば良いです。

よって、条件を満たす組 (a, b, c) の個数は ${}_nC_3$ です。

以上より $L_n \geq 1 + {}_nC_3 > {}_nC_3$ です。