

2025 年北海道大学文系問題 3

数列  $\{a_n\}$  を次の条件により定めます。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad (n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n}$  の値を求めてください。

## 解説・解答

$$\begin{aligned} & (n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n \\ &= (n+1)a_{n+2} - \{(n+1) + (n+2)\}a_{n+1} + (n+2)a_n \\ &= (n+1)(a_{n+2} - a_{n+1}) - (n+2)(a_{n+1} - a_n) = 0 \end{aligned}$$

$(n+1)(a_{n+2} - a_{n+1}) = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$  の両辺を  $(n+1)(n+2)$  で割ります。  
 $\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1} = \dots\dots\dots = \frac{a_2 - a_1}{1+1} = 1$  より  $a_{n+1} - a_n = n+1$  です。

$n \geq 2$  のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

(この式は  $n=1$  でも成り立ちます)

$$\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{225} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{225} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{226} \right) = \frac{225}{113} \text{ です。}$$