2024 年早稲田大学社会科学部問題 3

相異なる n 個の実数を小さい順に並べた集合 $S=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ を考えます。
$a_1=k>0,\ \dfrac{a_i}{a_1}\,(i=2,3,4,\cdots,n)$ がすべて S の要素となるとき a_n を求めてください。

解説・解答

$a_1 = k > 0,\ a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ なので $\dfrac{a_2}{a_1} < \dfrac{a_3}{a_1} < \dfrac{a_4}{a_1} < \cdots < \dfrac{a_n}{a_1}$ です。

$0 < k < 1$ のとき
$a_n < \dfrac{a_n}{a_1}$ なので $\dfrac{a_n}{a_1}$ は $S = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ の要素になりません。
よって、条件を満たす a_n はありません。

$k = 1$ のとき
$\dfrac{a_i}{a_1} = \dfrac{a_i}{1} = a_i$ なので a_n は $1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ を満たす任意の実数です。

$k > 1$ のとき
$\dfrac{a_n}{a_1} < a_n$ なので $\dfrac{a_n}{a_1} = a_{n-1},\quad \dfrac{a_{n-1}}{a_1} = a_{n-2},\quad \cdots\cdots,\quad \dfrac{a_2}{a_1} = a_1$ です。
よって、a_n は初項 a_1 で公比 a_1 の等比数列の第 n 項です。
$a_1 = k$ なので $a_n = a_1 \cdot {a_1}^{n-1} = {a_1}^n = k^n$ です。

以上より、
a_n は $0 < k < 1$ のとき存在しない、
$k = 1$ のとき $1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ を満たす任意の実数、
$k > 1$ のとき k^n です。