

2024年早稲田大学社会科学部問題3

k は正の数です。

相異なる n 個の正の数を小さい順に並べた集合 $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ を考えます。

$a_1 = k$, $a_i - a_1 (i = 2, 3, 4, \dots, n)$ がすべて S の要素となるとき a_n を求めてください。

解説・解答

$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ なので

$0 < a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < a_4 - a_1 < \cdots < a_n - a_1 < a_n$ です。

$a_i - a_1 (i = 2, 3, 4, \dots, n)$ がすべて $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ の要素なので

$a_2 - a_1 = a_1, \quad a_3 - a_1 = a_2, \quad a_4 - a_1 = a_3, \quad \dots, \quad a_n - a_1 = a_{n-1}$ です。

以上より、 a_n は初項 a_1 で公差 a_1 の等差数列の第 n 項です。

$a_1 = k$ なので $a_n = a_1 + (n-1)a_1 = na_1 = nk$ です。