2024 **年東京大学理系問題** 6

a, b, n は整数です。
$f(n) = n^3 + an^2 + bn$ が素数となる n は 3 個以下であることを示してください。

解説・解答

$f(n)=n^3+an^2+bn=n(n^2+an+b)$ が素数となるのは
$(n, n^2+an+b)=(\pm 1, \pm$素数$), (\pm$素数$, \pm 1)$ (複合同順) の場合です。

p_1, p_2, p_3, p_4 を素数とします。
$n=1$ のとき $1+a+b=p_1 \quad \cdots (1)$
$n=-1$ のとき $1-a+b=-p_2 \quad \cdots (2)$
$n=p_3$ のとき ${p_3}^2+ap_3+b=1 \quad \cdots (3)$
$n=-p_4$ のとき ${p_4}^2-ap_4+b=-1 \quad \cdots (4)$
$(1), (2)$ は一次式なのでそれぞれ満たす素数は高々1 個です。
$(3), (4)$ は二次式なのでそれぞれ満たす素数は高々2 個です。

$(3)-(4)$ より ${p_3}^2-{p_4}^2+ap_3+ap_4=2$ です。
左辺を因数分解して $(p_3+p_4)(p_3-p_4+a)=2$ ですが、
素数は 2 以上だから $p_3+p_4 \geqq 4$ なので $(p_3+p_4)(p_3-p_4+a) \neq 2$ です。
よって $(3), (4)$ の少なくとも一方は成り立ちません。

$f(n)$ が素数となる n が 4 個以上あり得るのは
$(1), (2), (3)$ が成り立つとき、または $(1), (2), (4)$ が成り立つときです。

(3) を満たす素数が 2 個 q_1, q_2 あるとすると
解と係数の関係より $q_1+q_2=-a$, $q_1q_2=b-1$ です。
素数は 2 以上なので $a=-(q_1+q_2) \leqq -4$ です。
$(1)-(2)$ より $2a=p_1+p_2$ なので $a \geqq 2$ となり矛盾します。
よって $(1), (2)$ が成り立つとき (3) を満たす素数は高々1 個です。
ゆえに $(1), (2), (3)$ が成り立つとき $f(n)$ が素数となる n は 3 個以下です。

(4) を満たす素数が 2 個 q_3, q_4 あるとすると
解と係数の関係より $q_3+q_4=a$, $q_3q_4=b+1$ です。
素数は 2 以上なので $(b+1)-a=q_3q_4-(q_3+q_4)=(q_3-1)(q_4-1)-1 \geqq 0$ です。
(2) より $(b+1)-a=-p_2 \leqq -2$ となり矛盾します。
よって (2) が成り立つとき (4) を満たす素数は高々1 個です。
ゆえに $(1), (2), (4)$ が成り立つとき $f(n)$ が素数となる n は 3 個以下です。

以上より、$f(n)$ が素数となる n は 3 個以下です。