2024 **年東京大学文系問題** 2

$5^n + 4^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めてください。

解説・解答

$2^{10} = 1024 > 10^3$ より $\log_{10} 2 > 3 \div 10 = 0.3$ です。
$2^{13} = 8192 < 10^4$ より $\log_{10} 2 < 4 \div 13 = 0.307\cdots$ です。
よって $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ です。

$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$ より $0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$ です。
$5^{27} < 10^{0.7\times 27} = 10^{18.9}, \quad 5^{28} > 10^{0.69\times 28} = 10^{19.32}$ です。

$10^{0.9} < 10^{3\log_{10} 2} = 2^3 = 8$ なので $5^{27} < 10^{18.9} = 10^{0.9} \cdot 10^{18} < 8 \cdot 10^{18}$ です。
$4^{27} = 2^{54} < 10^{0.31\times 54} = 10^{16.74} < 10^{17}$ です。

数列 $a_n = 5^n + 4^n$ は単調増加です。
$n = 27$ のとき $5^{27} + 4^{27} < 8 \cdot 10^{18} + 10^{17} = 8.1 \cdot 10^{18} < 10^{19}$ です。
$n = 28$ のとき $5^{28} + 4^{28} > 5^{28} > 10^{19.32} > 10^{19}$ です。

以上より $5^n + 4^n > 10^{19}$ となる最小の自然数は $n = 28$ です。