2024 **年東京工業大学問題** 5

a, b は整数、n は正の整数、α は複素数です。
二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の全ての解 α に対して
$\alpha^n = 1$ となる n が存在する組 (a, b) を求めてください。

解説・解答

$\alpha^n = 1$ より $|\alpha| = 1$ です。

$x^2 + ax + b = 0$ の解が実数のとき
$|\alpha| = 1$ より $\alpha = \pm 1$ なので、条件を満たすのは次の 3 通りです。
$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = 0\,, \quad (x-1)(x+1) = x^2 - 1 = 0\,, \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 0$
よって $(a, b) = (-2, 1,)(0, -1), (2, 1)$ です。

$x^2 + ax + b = 0$ の解が虚数のとき
$|\alpha| = 1$ より $\alpha = \cos\theta \pm i\sin\theta\ (\sin\theta \neq 0)$ なので、
$b = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$a = -\{(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)\} = -2\cos\theta$ は整数なので $\cos\theta = 0, \pm\dfrac{1}{2}$ です。
よって $(a, b) = (-1, 1), (0, 1), (1, 1)$ です。

以上より $(a, b) = (-2, 1), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (1, 1)(2, 1)$ です。