2024 **年筑波大学問題** *1*

三角形 OAB において $OA = OB = 4,\ AB = 2$ とします。
$\angle OAB$ の二等分線と線分 OB との交点を C とします。
点 O から直線 AC に垂線 OD を引きます。
三角形 BCD の面積を求めてください。

解説・解答

三角形 XYZ の面積を $\triangle XYZ$ と書くことにします。

三角形 OAB は $OA=OB=4,\ AB=2$ の二等辺三角形なので、AB の中点を H と置けば
$AH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{2}{2}=1,\quad OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$
$\triangle OAB=\dfrac{AB\cdot OH}{2}=\dfrac{2\cdot\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}$ です。

AC は $\angle OAB$ の二等分線なので $OC:CB=OA:AB=4:2=2:1$ です。
OC, CB を底辺と考えると高さは同じなので $\triangle ACO:\triangle ABC=OC:CB=2:1$ です。
$\triangle ABC=\triangle OAB\cdot\dfrac{1}{2+1}=\sqrt{15}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ です。

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=2^2$ より
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2^2}{2}=\dfrac{4^2+4^2+2^2}{2}=14$ です。

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

点 D は直線 AC 上にあるので、k を実数として
$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+\dfrac{2k}{3}\overrightarrow{OB}$ と置けます。

OD は直線 AC に垂線なので $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ です。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC}&=\left((1-k)\overrightarrow{OA}+\frac{2k}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\\
&=(k-1)|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{2-4k}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{4k}{9}|\overrightarrow{OB}|^2\\
&=(k-1)\cdot 4^2+\frac{2-4k}{3}\cdot 14+\frac{4k}{9}\cdot 4^2\\
&=\frac{40k-60}{9}=0 \text{ より } k=\frac{3}{2},\ \overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ なので } AC:CD=2:1 \text{ です。}
\end{aligned}$$

AC, CD を底辺と考えると高さは同じなので $\triangle ABC:\triangle BCD=AC:CD=2:1$ です。
$\triangle BCD=\triangle ABC\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ です。