2024 **年東京医科歯科大学問題** *1*
n は 2 以上の自然数、$a_k\,(k=1,2,3,\cdots,n)$ は自然数です。
$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ を解とする方程式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$ を考えます。
$a_k=1$ となる k がちょうど 2 個あるとき、n の取り得る値を求めてください。

解説・解答

$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_n$ としても一般性をを失いません。
$a_1 = a_2 = 1\,,\quad 2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq a_5 \leqq \cdots \leqq a_n$ と置きます。

$n = 2$ のとき　$a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2\,,\quad a_1 a_2 = 1^2 = 1$
$2 \neq 1$ なので $a_1 + a_2 \neq a_1 a_2$ です。

$n = 3$ のとき　$a_1 + a_2 + a_3 = 2 + a_3\,,\quad a_1 a_2 a_3 = a_3$
$2 + a_3 = a_3$ を満たす a_3 は無いので $a_1 + a_2 + a_3 \neq a_1 a_2 a_3$ です。

$n = 4$ のとき　$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + a_3 + a_4\,,\quad a_1 a_2 a_3 a_4 = a_3 a_4$
$2 + a_3 + a_4 = a_3 a_4$ は $(a_3 - 1)(a_4 - 1) = 3$ に式変形できるので $a_3 = 2\,,\ a_4 = 4$ です。

$n = 5$ のとき　$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + a_3 + a_4 + a_5\,,\quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_3 a_4 a_5$
$2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_3 a_4 a_5$ です。
$2 + 2 + 2 + 2 = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ なので $a_3 = a_4 = a_5 = 2$ は条件を満たします。

$n \geqq 6$ のとき　$n \cdot a_n > a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \geqq 1^2 \cdot 2^{n-3} \cdot a_n$
$n a_n > 2^{n-3} a_n$ より $2^{n-3} - n < 0$ です。
しかし $2^{n-3} - n$ は $n \geqq 6$ で単調増加、$2^{6-3} - 6 = 2 > 0$ なので $2^{n-3} - n > 0$ です。
よって $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \neq a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ です。

以上より、n の取り得る値は $n = 4, 5$ です。